Московский Государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

Л.К.Мартинсон, Е.В.Смирнов

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО КУРСУ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ РАЗДЕЛ «ВОЛНОВЫЕ СВОЙСТВА ЧАСТИЦ, ГИПОТЕЗА ДЕ БРОЙЛЯ».

Содержат краткий обзор основных понятий и соотношений теории, необходимых для решения задач. Изложена методика решения типовых задач и приведены условия задач для самостоятельного решения.
Для студентов 2-го курса всех специальностей МГТУ им. Н.Э.Баумана.

ВОЛНЫ ДЕ БРОЙЛЯ

В 1924 г. Луи де Бройль выдвинул гипотезу о том, что все материальные объекты в природе обладают как корпускулярными, так и волновыми свойствами. По гипотезе де Бройля корпускулярно-волновой дуализм является всеобщим свойством материи, и поэтому любая частица (электрон, протон, нейтрон и др.) обладает волновыми свойствами. При этом наличие у частицы волновых свойств принципиально изменяет характер ее движения в способ описания такого движения.

По гипотезе де Бройля волновые свойства свободной частицы, движущейся по инерции в отсутствие внешних силовых полей, описывает плоская волна де Бройля, частота $\boldsymbol{\omega}$ и длина волны $\boldsymbol{\lambda_Б}$ которой связаны с корпускулярными характеристиками частицы - энергией $\boldsymbol{E}$ и импульсом $\boldsymbol{p}$. Эта связь дается соотношениями

$$\omega = \frac{E}{\hbar}, \qquad \lambda_Б = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar}{p}. \tag{1}$$

Направление распространения волны де Бройля совпадает с направлением движения частицы, а групповая скорость волны $u_{ГР}$ и скорость движения частицы $\mathbf{v}$ одинаковы. Для доказательства этого напомним, что групповая скорость волны определяется из закона дисперсии $\omega=\omega(k)$, связывающего круговую частоту волны и волновое число $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, по формуле $u_{ГР} = \dfrac{d\omega}{dk}$.

Для плоской волны де Бройля $k = \dfrac{2\pi}{\lambda_Б} = \dfrac{2\pi p}{h} = \dfrac{p}{\hbar}$, поэтому

$$u_{ГР} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(\hbar\omega)}{d(\hbar k)} = \frac{dE}{dp}.$$

В релятивистской механике энергия и импульс частицы связаны соотношением

$$E^2=p^2c^2+m_0^2c^4,$$

где m_0- масса покоя частицы, а c - скорость света в вакууме. Возьмем дифференциал от левой и правой частей этого равенства:

$$2EdE = c^2 2pdp.$$

Отсюда

$$\frac{dE}{dp} = \frac{pc^2}{E} = \frac{pc^2}{mc^2} = \frac{p}{m} = \mathrm{v}$$

Таким образом,

$$u_{ГР} = \mathrm{v}.$$

В классической механике этот же результат получается, если воспользоваться классическим выражением для энергии свободной частицы $E = \frac{p^2}{2m_0}$.

В теории волновых процессов уравнение плоской монохроматической волны, распространяющейся в направлении оси x,

$$\Psi(x,t) = A(\omega t - kx)$$

часто записывают в комплексной форме

$$\Psi(x,t) = A\exp\{-i(\omega t - kx)\},$$

учитывая, что гармоническая функция $\cos\alpha$ является действительной частью комплексной функции exp($-i\alpha$), где $i = \sqrt{-1}$ - мнимая единица.

Уравнение плоской волны определяет амплитуду волны А, ее круговую частоту ω и волновое число $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Начальная фаза волны в приведенных выражениях выбрана равной нулю.

Так как для волны де Бройля $\omega = \frac{E}{\hbar}$, а $k = \frac{p}{h}$ то уравнение плоской волны де Бройля можно записать в виде

$$\Psi(x,t) = A\exp\{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)\} \qquad (2)$$

Плоская волна де Бройля описывает волновые свойства свободно движущейся частицы, имеющей энергию (кинетическую) E и импульс p. Сравнивая квадраты амплитуд волн де Бройля в различных областях пространства, можно оценить вероятности нахождения частицы в этих областях. Вероятность обнаружения частицы в данной области пространства тем больше, чем больше квадрат амплитуды волны де Бройля, т.е. ее интенсивность.

Волны де Бройля, которые часто называют волнами материи, как и волны любой природы, могут отражаться, преломляться, интерферировать друг с другом, испытывать дифракцию при взаимодействии с неоднородностями. В этом смысле можно говорить, например, о дифракции частиц и наблюдать такие дифракционные эффекты в различных экспериментах с неоднородными средами. Один из первых опытов по дифракции электронов на кристалле (рис. 1) был выполнен в 1927 г. К. Дэвиссоном и Л. Джермером. В опыте Дэвиссона-Джермера ускоренные в электронной пушке 1 электроны попадали на кристалл никеля под некоторым углом скольжения θ. Регулировкой величины ускоряющей разности потенциалов в электронной

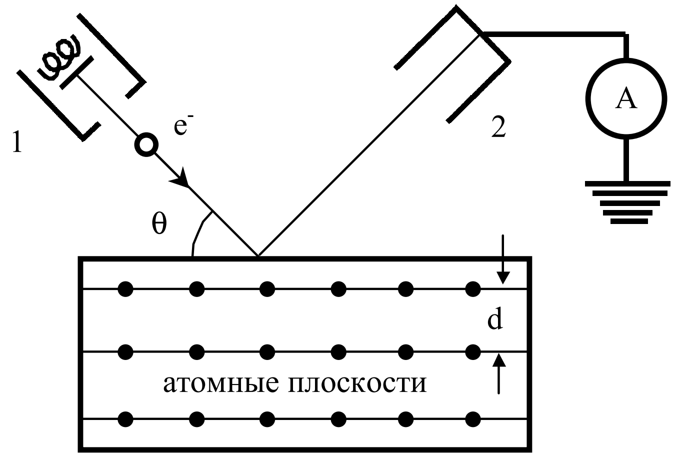

Рис. 1

пушке изменялись кинетическая энергия и импульс вылетающих электронов и, следовательно, их длина волны де Бройля. По току детектора 2 в опыте измерялось число отраженных от кристалла электронов.

Было обнаружено резкое увеличение числа отраженных от кристалла электронов в тех случаях, когда для электронных волн да Бройля выполнялось условие Вульфа - Брэгга

$$2d\sin\theta=n\lambda_Б,\ n=1, 2, \dots , \qquad (3)$$

соответствующее условию усиления вторичных волн, отраженных от различных атомных слоев (плоскостей), и**,** как следствие, - резкому увеличению амплитуды отраженной волны де Бройля. В формуле (3) d - расстояние между атомными плоскостями, проходящими через узлы кристаллической решетки, а целое число n - порядок максимума отражения волны де Бройля.

В представленной схеме опыта основная система атомных плоскостей, в которых атомы кристалла расположены наиболее густо, была параллельна сошлифованной поверхности кристалла. В общем случае атомные плоскости могут располагаться под некоторым углом к поверхности кристалла. Тогда в формуле (3) угол $\boldsymbol{\theta}$ следует рассматривать как угол скольжения пучка падающих электронов по отношению к системе атомных плоскостей, отражающих волны де Бройля.

Кристаллическая решетка в опыте Дэвиссона-Джермера играет роль объемной отражательной дифракционной решетки, и с точки зрения гипотезы де Бройля увеличение амплитуды отраженной волны при выполнении условия (3) означает существенный рост вероятности отражения электронов, что и приводит к наблюдаемому увеличению числа отраженных от кристалла электронов.

В аналогичных опытах наблюдались дифракционные эффекты для протонов, нейтронов и других частиц. Эти опыты подтвердили смелую гипотезу де Бройля о наличии у частиц волновых свойств и стимулировали дальнейшее развитие волновой (квантовой) механики**.**

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Получите выражение для длины волны де Бройля релятивистской частицы, обладающей кинетической энергией E_K. При каких значениях E_K ошибка в определении длины волны де Бройля по нерелятивистской формуле не превышает одного процента: а) для электрона, б) для протона?

Решение. В нерелятивистском случае кинетическая энергия частицы определяется по формуле $E_K = \frac{m_0 v^2}{2}$. Поэтому с учетом (1) для длины волны де Бройля движущейся частицы получаем

$$\lambda_Б = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_0 v} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0 E_k}}. \qquad (4)$$

В релятивистском случае, когда скорость частицы **v** сравнима со скоростью света в вакууме c, формула для кинетической энергии частицы, масса которой равна m_0, имеет вид

$$E_K = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1\right]$$

Из этого соотношения находим

$$v = c\sqrt{1-\left(1+\frac{E_k}{m_0c^2}\right)^{-2}}, \quad m = m_0\left(1+\frac{E_k}{m_0c^2}\right)$$

Отсюда получаем релятивистскую формулу связи импульса частицы с ее кинетической энергией

$$p = mv = m_0c\sqrt{\left(1+\frac{E_k}{m_0c^2}\right)^2 - 1} = \frac{1}{c}\sqrt{E_k\left(E_k + 2E_0\right)}.$$

Здесь $E_0 = m_0c^2$ - энергия покоя частицы. Полученную формулу можно преобразовать к виду

$$p = \sqrt{2m_0E_k}\sqrt{1+\frac{E_k}{2E_0}},$$

что позволяет записать формулу для длины волны да Бройля релятивистской частицы

$$\lambda'_Б = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0E_k}}\left(1+\frac{E_k}{2E_0}\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad (5)$$

Из формул (4) и (5) находим относительную ошибку ε при определении длины волны де Бройля по нерелятивистской формуле:

$$\varepsilon = \frac{\lambda_Б - \lambda'_Б}{\lambda_Б,} = 1 - \left(1 + \frac{E_k}{2E_0}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Отсюда получаем значение кинетической энергии частицы, которое соответствует относительной ошибке ε:

$$E_K(\varepsilon) = 2E_0\{(1-\varepsilon)^{-2} - 1\}.$$

Так как для малых ε справедливо разложение $(1-\varepsilon)^{-2}=1+2\varepsilon+...$, то для $\varepsilon<<1$ можно использовать приближенную формулу

$$E_K(\varepsilon) \approx 4\varepsilon E_0$$

Для электрона энергия покоя $E_0=0,511$ МэВ (Энергию частиц часто выражают в электрон-вольтах; 1 эВ=$1,6\cdot10^{-19}$ Дж. Используются также следующие единицы: 1 кэВ=10^3 эВ, 1 МэВ=10^6 эВ, 1 ГэВ=10^9 эВ), а для протона E_0=938,2 МэВ. По условию задачи ε=0,01. Поэтому находим

$$E_K(0,01) = \begin{cases} 20,4 \ \text{ кэВ - для электрона} \\ 37,5 \ \text{ МэВ - для протона} \end{cases}$$

Вплоть до таких значений кинетической энергии этих частиц при расчете длины волны де Бройля можно использовать нерелятивистскую формулу, допуская при этом относительную погрешность, не превышающую одного процента.

Задача 2. Какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти электрон, чтобы длина волны де Бройля была равна среднему расстоянию между атомами в кристаллических решетках $d=10^{-10}$ м?

Решение. Электрон, прошедший ускоряющую разность потенциалов U, приобретает кинетическую анергию $E_K=e\cdot U$ за счет работы сил электрического поля. Поэтому с помощью нерелятивистской формулы (4), возможность использования которой в данной задаче будет обоснована ниже, получим для длины волны де Бройля выражение

$$\lambda_Б = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0E_k}} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0eU}}.$$

По условию задачи $\lambda_Б=d$. Отсюда находим искомую ускоряющую разность потенциалов

$$U = \frac{4\pi^2\hbar^2}{2m_0ed^2}.$$

Подставляя числовые значения, получаем значение ускоряющей разности потенциалов U=150 В.

Так как значение кинетической энергии электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов 150 В, составляет E_K=150 эВ, то из оценок, полученных в задаче 1, следует, что в решаемой задаче с большой степенью точности можно было использовать нерелятивистскую формулу (4).

В заключение отметим, что ускоряющая разность потенциалов порядка нескольких сотен вольт использовалась в опытах Дэвиссона-Джермера, так как в этом случае длина волны де Бройля электронов $\lambda_Б \approx d$, что соответствует условию возможности наблюдения дифракционных эффектов при взаимодействии электронов с кристаллической решеткой.

Задача 3. Пучок электронов падает под углом скольжения θ на грань металлического монокристалла, для которого расстояние между отражающими атомными плоскостями, параллельными поверхности кристалла, равно $d=1{,}2\cdot 10^{-10}$ м. Определите значение первой ускоряющей разности потенциалов, при которой наблюдается интенсивное отражение электронов от кристалла. Как изменится это значение, если учесть преломление электронных волн в кристалле, считая известной работу выхода электрона из металла $A_{ВЫХ}=e\cdot U$, где $U_0=5B$ - внутренний потенциал металла.

Решение. Свяжем с движущимся электроном плоскую волну де Бройля. Длина

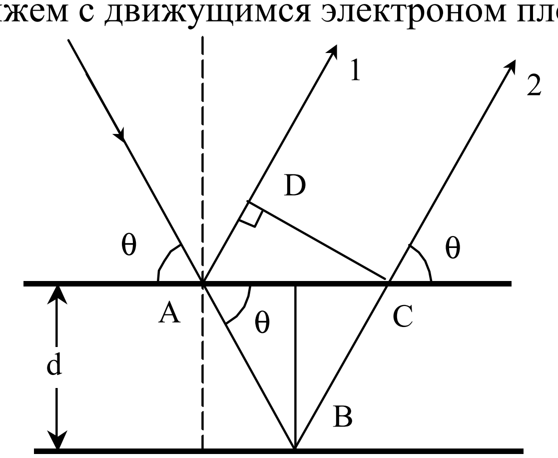

Рис. 2

этой волны зависит от ускоряющей разности потенциалов U, причем, как было показано при решении задачи 2,

$$\lambda_Б = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0eU}}\,. \qquad (6)$$

Рассмотрим два соседних отражающих атомных слоя вблизи поверхности кристалла (рис. 2). Волны 1 и 2, отраженные от этих атомных слоев, имеют разность хода

$$\Delta = (AB + BC) - AD = 2AB - AD = 2AB - AC\cos\theta = \frac{2d}{\sin\theta} - \frac{2d}{tg\theta}\cos\theta = 2d\sin\theta.$$

Эти волны усиливают друг друга при интерференции, если выполнено условие $\Delta = n\lambda_Б$, где $n=1, 2,...$, т.е. если выполнено условие Вульфа - Брэгга

$$2d\cdot\sin\theta = n\lambda_Б,\ n=1,2,\ \ldots.$$

С учетом (6) его можно записать в виде

$$2d \cdot sin\theta = \frac{n2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0eU}}.$$

Поэтому в случае интенсивного отражения электронов ускоряющую разность потенциалов можно определить по формуле

$$U_n = \frac{n^2 4\pi^2\hbar^2}{8d^2 m_0 e\, sin^2\theta}, \quad n = 1, 2, ...$$

Минимальное (первое) значение ускоряющей разности потенциалов соответствует $\boldsymbol{n}$=1 и равно

$$U_1 = \frac{4\pi^2\hbar^2}{8d^2 m_0 e\, sin^2\theta}.$$

Подставляя числовые значения параметров из условия задачи, находим, что $\boldsymbol{U}_1$=104 В.

Учет работы выхода означает, что на границе "вакуум-металл" происходит преломление электронной волны де Бройля. Закон преломления этой волны можно найти, если учесть, что в узком слое вблизи поверхности металла действуют электрические силы, которые изменяют только нормальную составляющую скорости электрона, влетающего в металл.

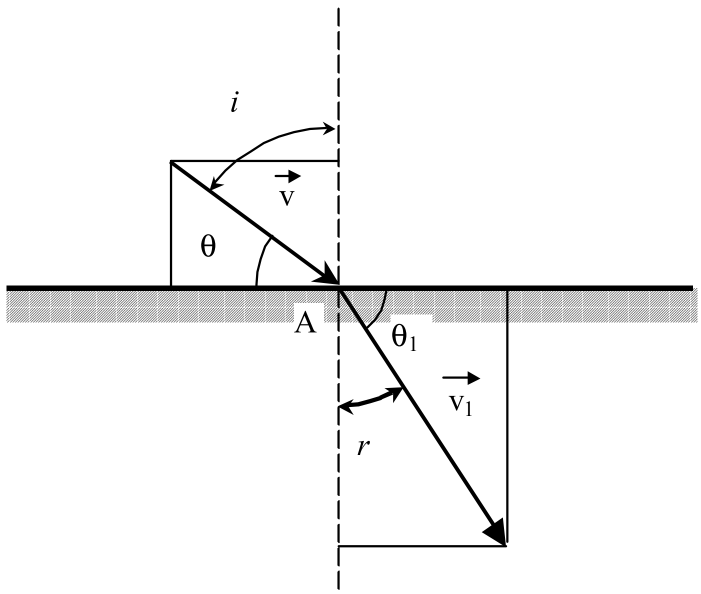

Рис. 3

Из рис. 3 следует, что если *i* - угол падения электронной волны де Бройля, а *r* - угол преломления, то $v \cdot sin\boldsymbol{i} = v_1 \cdot sin\boldsymbol{r}$, где v и v_1 - соответственно скорости электрона в вакууме и в металле.

Таким образом, закон преломления электронных волн де Бройля при прохождении через поверхность металла может быть записан в форме, аналогичной закону преломления световых волн:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n_e \,. \tag{7}$$

Здесь показатель преломления металла для электронной волны де Бройля

$$n_e = \frac{v_1}{v} = \frac{\lambda_Б}{\lambda'_Б} \,.$$

Из закона сохранения энергии для электрона

$$\frac{m_0 v_1^2}{2} = \frac{m_0 v^2}{2} + A_{ВЫХ} \,,$$

где $\frac{m_0 v^2}{2} = eU$, а $A_{ВЫХ}=eU_0$, находим, что

$$n_e = \frac{v_1}{v} = \sqrt{1 + \frac{U_0}{U}} \tag{8}$$

Теперь с учетом преломления электронной волны на границе “вакуум-металл” (рис. 4) разность хода отраженных от соседних атомных плоскостей волн можно предста-

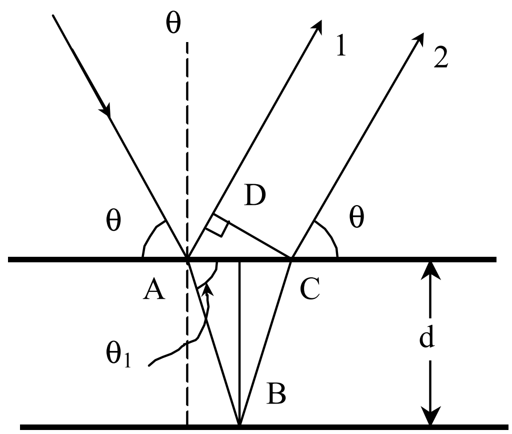

Рис. 4

вить в виде

$$\Delta = (AB + BC)n_e - AD = 2ABn_e - AC\cos\theta = \frac{2dn_e}{\sin\theta_1} - \frac{2d}{tg\theta_1}\cos\theta$$

Так как $\theta = \frac{\pi}{2} - i$,а $\theta_1 = \frac{\pi}{2} - r$ то из (7) следует, что $\cos\theta = n_e \cos\theta_1$. Поэтому

$$\Delta = \frac{2dn_e}{\sin\theta_1} - \frac{2dn_e \cos^2\theta_1}{\sin\theta_1} = 2dn_e \sin\theta_1 = 2d\sqrt{n_e^2 - \cos^2\theta} \,.$$

Следовательно, с учетом преломления электронной волны де Бройля условие усиления отраженных от соседних атомных плоскостей волн запишется в виде

$$2d\sqrt{n_e^2 - \cos^2\theta} = n\lambda_Б \,, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Используя (6) и (8), преобразуем это условие к виду

$$2d\sqrt{\sin^2\theta-\frac{U}{U_0}}=\frac{n2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0eU}}$$

Отсюда находим те значения ускоряющей разности потенциалов, при которых наблюдается резкое увеличение числа отраженных от кристалла электронов:

$$U_n=\frac{n^2 4\pi^2\hbar^2}{8d^2m_0e\sin^2\theta}-\frac{U_0}{\sin^2\theta},\quad n=1,2,\ldots,$$

Минимальная разность потенциалов соответствует значению порядка отражения n=1 и равна

$$U_1=\frac{4\pi^2\hbar^2}{8d^2m_0e\sin^2\theta}-\frac{U_0}{\sin^2\theta}.$$

С учетом числовых значений параметров, взятых из условия задачи, находим, что U_1=(104 - 20) В=84 В. Это означает, что при расчете ускоряющей разности потенциалов поправка на преломление электронной волны де Бройля составляет величину порядка 20 %.

Задача 4. При каком значении кинетической энергии E_K длина волны де Бройля для электрона равна его комптоновской длине волны? С какой скоростью движется такой электрон?

Решение. Комптоновской длиной волны частицы, имеющей массу покоя m_0 называют величину

$$\Lambda=\frac{2\pi\hbar}{m_0c}.$$

Именно эта характеристика определяет изменение длины волны излучения в эффекте Комптона [1 - 3], когда излучение рассеивается частицами данного сорта.

По условию задачи $\lambda_Б=\Lambda$, поэтому

$$\frac{2\pi\hbar}{P}=\frac{2\pi\hbar}{m_0},$$

т.е. $p=m_0c=E_0/c$, где $E_0=m_0c^2$ - энергия покоя частицы. С другой стороны, как было показано при решении задачи 1, импульс релятивистской частицы связан с ее кинетической энергией соотношением $p=\frac{1}{c}\sqrt{E_K(E_K+2E_0)}$. Поэтому в нашем случае должно выполняться соотношение

$$E_0=\sqrt{E_K(E_K+2E_0)}$$

После несложных преобразований получаем

$$E_K^2+2E_0E_K-E_0^2=0.$$

Положительный корень этого квадратного уравнения

$$E_K=(\sqrt{2}-1)E_0 \qquad (9)$$

определяет искомую кинетическую энергию частицы. В частности, для электрона $\boldsymbol{E_0}$=0,511 МэВ и $\boldsymbol{E_K}$=0,212 МэВ.

Так как для релятивистской частицы

$$E_K = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(\mathrm{v}/c)^2}} - m_0c^2 = E_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-(\mathrm{v}/c)^2}} - 1\right),$$

то при значении кинетической энергии (9) скорость частицы

$$\mathrm{v} = \frac{c}{\sqrt{2}} = 2,1 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

<u>Задача 5.</u> Вычислите длину волны де Бройля молекул водорода, соответствующую их наиболее вероятной скорости, если газ имеет комнатную температуру Т=300 К. Найдите наиболее вероятную длину волны де Бройля для молекул этого газа.

<u>Решение.</u> Если классический газ находится в состоянии термодинамического равновесия при некоторой температуре, то молекулы этого газа движутся с различными скоростями, причем их распределение по скоростям дается известной формулой Максвелла

$$f(\mathrm{v}) = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} \mathrm{v}^2 \exp\left(-\frac{m_0\mathrm{v}^2}{2kT}\right) \qquad (10)$$

Здесь $\boldsymbol{m_0}$ - масса молекулы; v - скорость молекулы; $\boldsymbol{T}$ - абсолютная температура газа.

Качественный вид зависимости (10) при некотором значении температуры $\boldsymbol{T}$ представлен на рис. 5*а*.

По смыслу функций распределения молекул по скоростям площадь под кривой $f(\mathrm{v})$ в любом интервале скоростей от v_1 до v_2 определяет относительную долю молекул газа, скорости которых заключены в этом интервале скоростей. При этом скорость, соответствующую максимуму функции распределения $f(\mathrm{v})$, называют наиболее вероятной скоростью молекул газа для данной температуры $\boldsymbol{T}$. Эту скорость можно найти из условия

$$\frac{df}{d\mathrm{v}} = 0 \qquad \text{при} \qquad \mathrm{v} = \mathrm{v}_B .$$

Дифференцируя (10) и приравнивая нулю производную, получаем соотношение

$$2\mathrm{v}_B - \frac{m_0}{kT}\mathrm{v}_B^2 = 0,$$

из которого находим наиболее вероятную скорость молекул газа

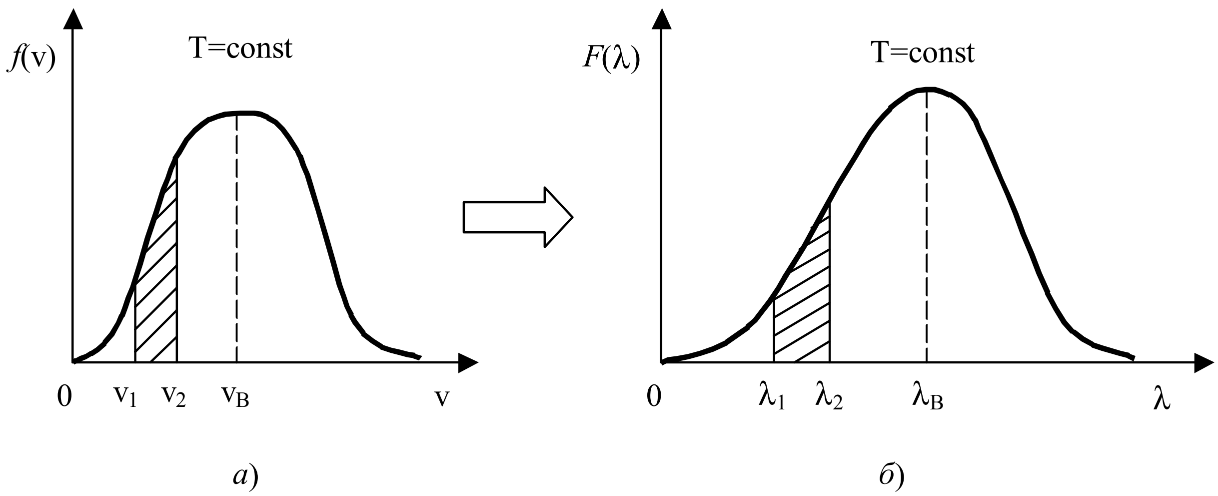

Рис. 5

$$\mathbf{v}_B = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}\ .$$

Найденной скорости соответствует длина волны де Бройля молекул

$$\lambda_Б^{(B)} = \frac{h}{m_0 \mathbf{v}_B} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0 kT}}\ .$$

Так как в одном моле газа число молекул равно числу Авогадро N_A=6,02·10^{23} моль$^{-1}$, то массу молекулы m_0 можно найти по молярной массе газа μ, причем $m_0 = \dfrac{\mu}{N_A}$. Поэтому для длины волны де Бройля, соответствующей наиболее вероятной скорости молекул, получаем выражение

$$\lambda_Б^{(B)} = 2\pi\hbar\sqrt{\frac{N_A}{2\mu kT}}$$

Подставляя значения μ=2·10^{-3} кг/моль и T=300 К, находим $\lambda_Б^{(B)} = 1,25\cdot 10^{-10}$ м.

Несколько иной смысл имеет наиболее вероятная длина волны де Бройля молекул рассматриваемого газа. Для ее определения следует перейти от функции распределения молекул по скоростям f(v) к функции распределения молекул по длинам волн де Бройля $F(\lambda)$ (см. рис. 5, *б*). Этот переход соответствует замене переменной v на переменную $\lambda = \dfrac{2\pi\hbar}{m_0 \mathbf{v}}$ в равенстве

$$dn = f(\mathbf{v})d\mathbf{v} = F(\lambda)d\lambda$$

Здесь dn - число молекул, скорость которых лежит в интервале от v до v+dv, а длина волны де Бройля - в интервале от λ до $\lambda+d\lambda$. Таким образом, получаем

$$F(\lambda) = f\{\mathrm{v}(\lambda)\}\left|\frac{d\mathrm{v}}{d\lambda}\right| = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2}\left(\frac{2\pi\hbar}{m_0\lambda}\right)^2 exp\left\{-\frac{2\pi^2\hbar^2}{m_0 kT\lambda^2}\right\}\frac{2\pi\hbar}{m_0\lambda^2}$$

Отсюда находим функцию распределения молекул по длинам волн де Бройля в виде

$$F(\lambda) = 4\pi\left(\frac{2\pi\hbar^2}{m_0 kT}\right)^{3/2}\lambda^{-4}\, exp\left(-\frac{2\pi^2\hbar^2}{m_0 kT\lambda^2}\right)$$

Определяя теперь наиболее вероятную длину волны де Бройля $\lambda^*_Б$ как длину волны, соответствующую максимуму функции $F(\lambda)$, т.е. находя ее из условия $dF/d\lambda=0$ при $\lambda=\lambda^*_Б$, получаем

$$\lambda^*_Б = \frac{\pi\hbar}{\sqrt{m_0 kT}} = \pi\hbar\sqrt{\frac{N_A}{\mu kT}}$$

Расчет по этой формуле дает значение $\lambda^*_Б=0{,}89\cdot10^{-10}$ м.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1. Оцените длину волны де Бройля $\lambda_Б$ для частицы лабораторных масштабов, например, массой $m_0=10^{-3}$ кг, движущейся со скоростью v=10 м/с. Нужно ли учитывать волновые свойства у таких частиц?

Ответ: $\lambda_Б = \dfrac{2\pi\hbar}{m_0\mathrm{v}} = 6{,}62\cdot10^{-32}$ м. Не нужно

Задача 2. Вычислите длину волны де Бройля $\lambda_Б$ теплового нейтрона, т.е. нейтрона, находящегося в тепловом равновесии со средой, имеющей комнатную температуру T=300 К.

Ответ: $\lambda_Б = \dfrac{2\pi\hbar}{\sqrt{3m_0 kT}}$; $\lambda_Б = 1{,}45\cdot10^{-10}$ м.

Задача 3. Какую ускоряющую разность потенциалов U должен пройти электрон, чтобы его длина волны де Бройля $\lambda_Б$ была равна 0,1 нм?

Ответ: $U = \dfrac{2\pi^2\hbar^2}{m_0 e\lambda_Б^2}$; U=150 В.

Задача.4. Электрон движется по окружности радиусом R=0,5 см в однородном магнитном поле с индукцией $B=8\cdot10^{-3}$ Тл. Определите длину волны де Бройля электрона $\lambda_Б$.

Ответ: $\lambda_Б = \dfrac{2\pi\hbar}{eRB}$; $\lambda_Б = 1{,}3\cdot10^{-10}$ м.

Задача 5. Поток нейтронов проходит через два малых отверстия в дисках из кадмия (поглотитель нейтронов), жестко насаженных на общую ось (рис. 6). Отверстия в дисках расположены на одинаковом расстояния от оси и повернуты друг от-

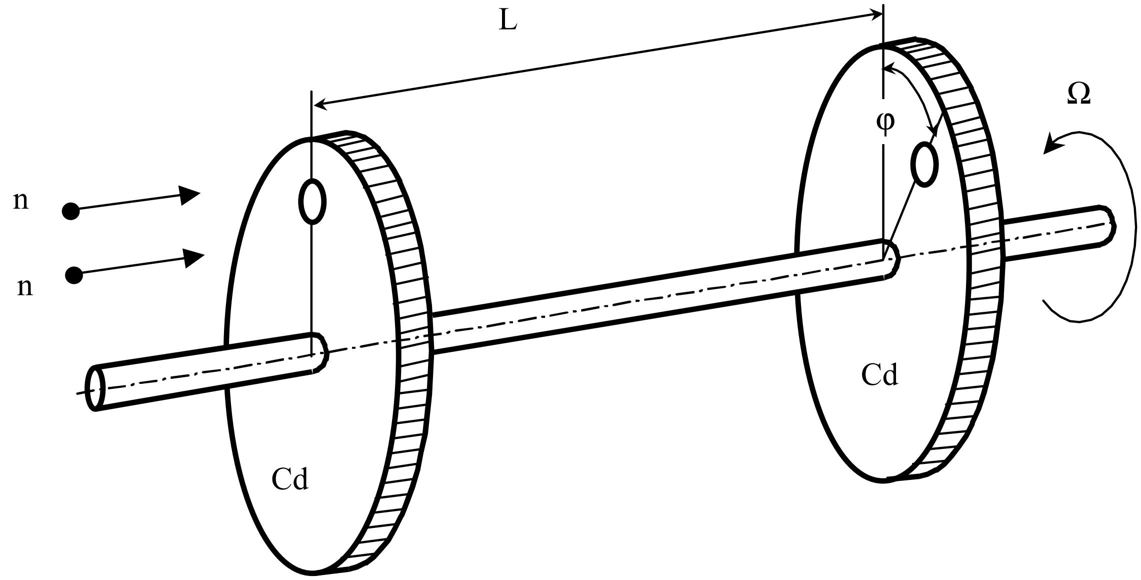

Рис. 6

носительно друга на угол φ=4°. Диски равномерно вращаются вокруг оси с угловой скоростью Ω=300 рад/с. Определите длину волны де Бройля нейтронов, пропускаемых таким устройством, если расстояние между дисками равно L=1 м.

Ответ: $\lambda_Б = \dfrac{2\pi\hbar\varphi}{m_0 l\Omega}$; $\lambda_Б = 0,92\cdot 10^{-10}$ м.

Задача 6. Какую энергию ΔE необходимо дополнительно сообщить электрону, чтобы его дебройлевская длина волны уменьшилась от λ_1=10^{-10} м до λ_2=$0,5\cdot10^{-10}$ м?

Ответ: $\Delta E = \dfrac{2\pi^2\hbar^2}{m_0}\left(\dfrac{1}{\lambda_2^2}-\dfrac{1}{\lambda_1^2}\right)$; $\Delta E = 0,45$ кэВ

Задача 7. Нерелятивистская частица массой m_1; с кинетической энергией E испытывает упругое лобовое соударение с покоящейся частицей массой m_2. Найдите дебройлевские длины волн частиц после соударения в системе отсчета, связанной с центром масс этих частиц.

Ответ: $\lambda_Б^{(1)} = \lambda_Б^{(2)} = \left(1+\dfrac{m_1}{m_2}\right)\dfrac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_1E_K}}$.

Задача 8. Параллельный пучок электронов с кинетической энергией E=25 эВ испытывает дифракцию на плоской щели шириной b=5 мкм. Определите ширину центрального дифракционного максимума на экране, расположенном на расстоянии

L=1 м от щели.

Ответ: $\Delta x = \dfrac{2\pi\hbar l}{b\sqrt{2m_0 E_K}}$; $\Delta x = 0,1$ м.

Задача 9. Узкий пучок моноэнергетических электронов падает нормально на поверхность монокристалла никеля. В направлении, составляющем угол α=55° с нормалью к поверхности, наблюдаются максимумы отражения электронов четвертого порядка от атомных плоскостей с межплоскостным расстоянием d=2,1·10^{-10} м. Определите кинетическую энергию падающих электронов.

Ответ: $E_K = \dfrac{32\pi^2\hbar^2}{m_0 d^2 \cos^2 \alpha/2}$; E_K=180 эВ

Задача 10. Параллельный пучок моноэнергетических нейтронов, движущихся со скоростью v, падает на плоскую поверхность кристалла под углом скольжения θ_0 и испытывает на кристалле брэгговское отражение. Источник нейтронов приводят в движение с постоянной скоростью u>>v в направлении нормали к отражающей поверхности. Под каким углом скольжения θ надо направить теперь пучок нейтронов, чтобы наблюдалось брэгговское отражение прежнего порядка?

Ответ: $\sin\theta = \left(1 + \dfrac{u}{\mathrm{v}}\sin\theta_0\right)\sin\theta_0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.5. М.: Наука. Физматлит, 1998.
2. Матвеев А.Н. Атомная физика. М.: Высшая школа, 1989.
3. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Атомная и ядерная физика. Ч. 1. М.: Наука, 1986.
4. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. М.: ЗАО "Издательство БИНОМ", 1998.
5. Иродов И.Е. Задачи по квантовой физике. М.: Высшая школа, 1991.
6. Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике. М.: Высшая школа, 1988.
7. Мартинсон Л.К. Методические указания к решению задач по курсу общей физике. Разделы "Элементы квантовой механики", "Физика твердого тела". М.: МВТУ, 1983.